Arbeitskreis des
Zentrums für angewandte Lernforschung
(gemeinnützige GmbH)
www.arbeitskreis-lernforschung.de

Wissenswertes zum Thema

Rechenschwäche/Dyskalkulie

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg

Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Kurz gefasst:

Wissenswertes zum Thema Rechenschwäche/Dyskalkulie [1]

- Schwach im Rechnen - Dyskalkulie?
- Vorurteile über "Rechenschwäche"
- Ist Rechenschwäche eine Teilleistungsstörung?
- Helfen "basale Trainings"? Helfen neuropsychologische Erkenntnisse?
- Zählendes Rechnen als Problem
- Vorteile nicht zählender Rechenstrategien
- Kernprobleme und Stolpersteine beim Rechnenlernen

Herausgegeben vom Arbeitskreis des Zentrums für angewandte Lernforschung (gGmbH)

ZENTRUM FÜR DYSKALKULIETHERAPIE BONN
BERATUNG - DIAGNOSTIK - LERNTHERAPIE

IML Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig
Beratungs- und Forschungseinrichtung zur Diagnose, Therapie und Prävention der Rechenschwäche

MATHEMATISCH LERNTHERAPEUTISCHES ZENTRUM
DORTMUND/BOCHUM
Therapie der Rechenschwäche/Dyskalkulie

Mathematisch Lerntherapeutisches Institut
Düsseldorf

Lerntherapeutisches Zentrum Rechenschwäche/Dyskalkulie Köln LZR
Diagnose
Beratung
Therapie

Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen (Rechenschwäche/Dyskalkulie)
- Förderdiagnose
- Beratung
- Lerntherapie

Zentrum für mathematisches Lernen - Kassel

Osnabrück, im April 2007

[1] Mit freundlicher Genehmigung entnommen aus:

GERSTER 2002: Gerster, H.-D.: Skript, Pädagogische Hochschule Freiburg. Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken, Freiburg 2002 (überarbeitete Fassung Januar 2006)

GERSTER/SCHULTZ 2000: Gerster, H.-D.; Schultz, R.: Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen. Pädagogische Hochschule Freiburg. Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken. Überarbeitete und erweiterte Fassung, Freiburg 2000. Kostenfreier Zugang unter: http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397/

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Schwach im Rechnen - Dyskalkulie?

Die Begriffe „Dyskalkulie", „Arithmasthenie", „Rechenstörung", „Rechenschwäche" sind wissenschaftlich *nicht* geklärt. Die Bezeichnungen „Dyskalkulie" und „Arithmasthenie" werden vorwiegend von Therapieinstituten, im medizinischen, sonderpädagogischen und psychologischen Bereich sowie in Medien, z. B. im Internet, verwendet. Sie suggerieren das Vorhandensein einer Krankheit, die eine (außerschulische) Therapie erfordere.

Im Bereich der Schule und der Mathematikdidaktik sind eher die Begriffe „Rechenstörung" und „Rechenschwäche" gebräuchlich. Häufig werden diese Begriffe synonym verwendet.

Angemessen erscheint die Formulierung „**besondere Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens**", analog zu den „Grundsätzen zur Förderung von Schülern mit besonderen Schwierigkeiten des Lesens und Rechtschreibens", die von der KMK bereits 1978 für den Bereich der „Legasthenie" formuliert wurden.

Als Richtschnur dient seit 1991 häufig die Definition „Rechenstörung" nach der **ICD** 10 (**I**nternational **C**lassification of **D**iseases) der WHO (Weltgesundheitsorganisation). Dieser Versuch, das international gebräuchliche Wort „dyscalculia" zu übersetzen, ist für eine wissenschaftliche Begriffsklärung unbrauchbar und für die Förderung der Kinder eher kontraproduktiv.[1]

Hierbei handelt es sich um eine *Diskrepanz*definition[2], die Kinder mit niedrigem IQ-Wert, mit eindeutig unangemessener Unterrichtung oder mit neurologischen oder sonstigen Erkrankungen ausschließt. Ausgeschlossen sind nach dieser Definition auch Kinder, die zugleich Lese- oder Rechtschreibschwierigkeiten haben. Weitere Einwände gegen diese Definition:

Intelligenztests wie HAWIK-R bzw. HAWIK III, AID-2 oder K-ABC erfassen auch Rechenleistungen. Dadurch ist der IQ-Wert nicht unabhängig von einer evtl. vorhandenen Rechenstörung und kann nur bedingt als Vergleichsgröße herangezogen werden. Durch Verringerung des IQ des „rechenschwachen" Kindes könnte es aus der Definition „Rechenstörung" herausfallen.

Rechenstörung kann nach dieser Definition als *Persönlichkeitskonstrukt* (Eigenschaft des Kindes) missverstanden werden. Außerhalb des Kindes liegende Ursachen werden dabei vernachlässigt.

Die Definition kann als *Erklärung* missverstanden werden. Dann entsteht ein logischer Zirkelschluss: Ein Kind ist rechenschwach, *weil* es „rechenschwach" ist.

„Eindeutig unangemessene Beschulung" ist unklar. Wäre die Beschulung dem individuellen Lernstand des jeweiligen Kindes voll angemessen, gäbe es nur sehr wenige „rechenschwache" Kinder.

Die Definition wird oft als Maßstab für die Notwendigkeit von Fördermaßnahmen verwendet. Dies ist vor allem dann fragwürdig, wenn ***dadurch Kinder von angemessenen Fördermaßnahmen ausgeschlossen*** werden (beispielsweise ambulanten Fördermaßnahmen nach § 35a des Kinder- und Jugendhilfegesetzes), die diese besonders dringend bräuchten. Auch Kinder mit geringerer Intelligenz, mit unangemessener Beschulung oder mit kombinierter Störung schulischer Leistungen benötigen Förderung.

Fazit

Der Begriff „rechenschwach" ist lediglich eine *Beschreibung* dafür, dass ein Kind schwach im Rechnen ist. Er darf *nicht als eine Erklärung* missverstanden werden. Er soll auch *nicht als ein Persönlichkeitskonstrukt* (als eine Eigenschaft des Kindes allein) verstanden werden. Immer sind Bedingungen aus dem sozialen Umfeld (Familie, Schule) beteiligt.

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Die Entscheidung über die Vergabe öffentlicher Fördermittel nach § 35a KJHG sollte *nicht* abhängig gemacht werden von der Zuschreibung einer „Krankheit” oder „seelischen Behinderung”. Sie sollte sich stützen auf Erkenntnisse über den Schweregrad der Schwierigkeiten beim Erlernen des Rechnens und die Einschätzung der Bedeutung dieser Schwierigkeiten für das weitere Rechnenlernen. Die dafür erforderliche Diagnostik soll zugleich brauchbare Hinweise für Fördermaßnahmen liefern. Die vorliegenden standardisierten diagnostischen Verfahren reichen dafür nicht aus.

Neuere mathematikdiagnostische Verfahren (DEMAT 1+, 2+, 3+, ...,[3] HaReT,[4] HRT 1-4,[5] OTZ[6], ZAREKI,[7] RZD 2-6[8]) selektieren korrekte von fehlerhaften Ergebnissen und quantifizieren diese nach einem feststehenden Auswertungsschlüssel. Das Resultat ist eine Aussage darüber, was das Kind an **Leistung im Verhältnis zu einer definierten Vergleichsgruppe** erbringt.

Standardisierte Testverfahren stoßen an ihre Grenzen, wenn es darum geht, **subjektive** Bewältigungsstrategien, **individuelle** Verständnisschwierigkeiten, fehlerhafte Gedanken, die das Zustandekommen der Fehler erklären, zu erfassen und damit die **Quellen des vorliegenden Versagens** aufzuspüren. Derartige Tests genügen *nicht* den Anforderungen einer auf lerntherapeutische Intervention ausgerichteten Diagnose. Ursachen vorhandener Probleme können mit diesen Tests *nicht* ermittelt werden. Die spezielle psychische Situation des Kindes und seine bisherige schulische Entwicklung werden dabei nicht erfasst.

Lerntherapie benötigt eine differenzierte Fehleranalyse zur Bestimmung des Ausgangspunktes des falschen Verständnisses. Erst dieses bildet zusammen mit der Erfassung des psychosozialen Umfeldes die Grundlage für den gezielten lerntherapeutischen Eingriff.

Literaturhinweis:

[1] SCHIPPER, W. (2001). Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. Occasional Paper 182. Uni Bielefeld/IDM.

[2] GRISSEMANN (1982) legt bei seiner Definition “Rechenversagen im Rahmen eines allgemeinen Underachievement” im Rechnen den Prozentrang < 15 und IQ mindestens 90 zugrunde.

[3] KRAJEWSKI, K., KÜSPERT, P. & SCHNEIDER, W. DEMAT 1+, 2+, 3+, … . Deutscher Mathematiktest, Göttingen: Beltz Test.

[4] FREIE UND HANSESTADT HAMBURG, Behörde für Bildung und Sport (2006). HaReT 1, 2, 3, 4. Hamburger Rechentest für die Klassen 1-4. Test zur Früherfassung von Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht.

[5] HAFFNER, J., BARO, K., PARZER, P. & RESCH, F.(2005). HRT 1-4. Heidelberger Rechentest. Göttingen: Hogrefe.

[6] HASEMANN, K. (2001). OTZ: Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung. Göttingen: Hogrefe.

[7] von ASTER, M. (2001). ZAREKI: Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen bei Kindern. Frankfurt a. M.: Swets & Zeitlinger.

[8] JACOBS, C./PETERMANN. F. (2005). RZD 2-6: Rechenfertigkeiten- und Zahlverarbeitungs-Diagnostikum für die zweite bis sechste Klasse. Göttingen: Hogrefe.

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Vorurteile über „Rechenschwäche“

Vorurteile über Rechenschwäche sind weit verbreitet. Sie sollen nicht selten Erzieher der Kinder (gemeint sind Eltern und Lehrer) entlasten.

Vorurteil: Rechenschwäche ist erblich

Es ist noch kein Gen gefunden worden, das man für Rechenschwäche verantwortlich machen könnte. Erblichkeit wurde als mögliche Ursache von „Rechenstörung“ in Betracht gezogen. Es wird aber immer schwierig sein, zwischen biologischen und sozialen Faktoren zu gewichten. Der Eindruck von Erblichkeit kann auch dadurch entstehen, dass „rechenschwache“ Eltern ihren Kindern weniger bereichspezifische Anregungen vermitteln, dafür aber eher negative Einstellungen zu diesem Stoff und evtl. auch zur Schule.

Vorurteil: Rechenschwäche ist eine hirnorganische Krankheit

Trifft so nicht zu. Nur etwa 3 % der „rechenschwachen“ Kinder haben neurologische Auffälligkeiten. In diesem Zusammenhang soll erwähnt werden, dass Begriffe wie „Dyskalkulie“ oder „Akalkulie“ sich auf *Erwachsene* mit zuvor normalen Rechenfähigkeiten beziehen, bei denen nach einem traumatischen Ereignis (Hirnblutung, Hirntumor, sonstige Hirnverletzungen) die zuvor vorhandene Rechenfähigkeit ganz (Akalkulie) oder teilweise (Dyskalkulie) verloren geht (CLAROS-SALINAS, 1988).

Vorurteil: Rechenschwäche ist Dummheit (mangelnde Intelligenz)

Stimmt nicht. Es gibt rechenschwache Kinder mit durchschnittlicher und mit überdurchschnittlicher Intelligenz. Normale Intelligenz (IQ > 85) ist definitionsgemäß vorausgesetzt, wenn von „Rechenstörung“ gesprochen wird.

Vorurteil: Rechenschwäche ist eine allgemeine Lernschwäche

Gleichsetzen kann man das sicher nicht. Vielleicht ist Rechenschwäche nur die Folge einer „Belehrungsschwäche“ (WITTMANN, 1995). Nach KLAUER (1966) und KANTER (1977) gibt es keinen globalen Mangel an Lernfähigkeit im Sinne einer allgemeinen Lernbehinderung, sondern immer nur aufgabenspezifische Schwierigkeiten (zitiert nach BEGEMANN, 2000).

Vorurteil: Rechenschwäche tritt isoliert auf

Diese Aussage ergibt sich aus gängigen Definitionen der Rechenschwäche (z. B. ICD 10 der WHO). Sie tritt häufig zusammen mit anderen Lernschwierigkeiten auf. Zu bedenken ist auch, dass infolge der schlechten Lernerfahrungen in Mathematikunterricht das Kind an sich zu zweifeln beginnt und die schlechte Selbsteinschätzung sich auf andere Fächer übertragen kann. Ebenso besteht die Gefahr des Halo-Effektes (der Lehrer schätzt das Kind auch in anderen Fächern schlechter ein).

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Vorurteil: Rechenschwäche kann an typischen Fehlern erkannt werden

Stimmt nicht. Nahezu alle Kinder machen die gleichen Fehler beim Erlernen eines neuen Stoffes, nur zu unterschiedlicher Zeit und auch unterschiedlich lange.

Vorurteil: Rechenschwäche ist dauerhaft unveränderlich

Diese Einschätzung ergibt sich aus der Interpretation von Rechenschwäche als Persönlichkeitsmerkmal, als Eigenschaft des Kindes. Sie vernachlässigt familiäre und schulische Einflüsse und kann als bequeme Ausrede missbraucht werden. Auch schwache Kinder können unter günstigen Bedingungen zumindest die elementaren Rechenfertigkeiten erlernen.

Vorurteil: Rechenschwäche kann durch basale Trainings behoben werden

Diese Vermutung konnte bisher nicht bestätigt werden (siehe nachfolgenden Beitrag).

Vorurteil: Rechenschwäche gibt sich von selbst

Dies bleibt meistens nur ein „frommer Wunsch". Wer Verantwortungsgefühl für ein schwaches Kind hat, sucht nach Möglichkeiten, auch dem schwachen Kind beim Erwerb der erforderlichen Fähigkeiten zu helfen.

Literaturhinweis:

BEGEMANN, E. (2000). *Lernen verstehen - Verstehen lernen. Zeitgemäße Einsichten für Lehrer und Eltern. Mit Beiträgen von Heinrich Bauersfeld.* Frankfurt am Main: Lang.

CLAROS-SALINAS, D. (1988). *Zur Diagnostik und Therapie von hirnschädigungsbedingten Störungen im Umgang mit Zahlen (Akalkulie)*. In L. Dummer-Smoch: *Legasthenie. Bericht über den Fachkongress 1988.* Bundesverband Legasthenie.

WITTMANN, E. Ch. (1995). *Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht vom Kind und vom Fach aus.* In G. N. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.). *Mit Kindern rechnen.* Frankfurt/M. Arbeitskreis Grundschule.

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Ist Rechenschwäche eine Teilleistungsstörung?

Der Begriff „Teilleistungsstörung" kann zweierlei bedeuten:

> *eine **Schul**leistungsstörung,* also eine Störung in einem *schulischen Teilgebiet.* In diesem Sinn ist „Rechenschwäche" eine Schwäche in einem schulischen Stoffgebiet, dem Rechnen, und nichts anderes!

> *eine **Hirn**leistungsstörung,* also eine neuropsychologische Störung oder auch *Teilfunktionsstörung*.[1] Nach GRAICHEN (1979) handelt es sich dabei um „Leistungsschwächen für einzelne Faktoren oder Glieder innerhalb eines größeren funktionellen Systems, das zur Bewältigung einer bestimmten Anpassungsaufgabe erforderlich ist".

Betrachtet man Rechenschwäche als eine Teilleistungsstörung im *neuropsychologischen* Sinn, so steht mathematisches Denken am Ende einer langen Reihe neuropsychologischer Reifungsprozesse. So verstanden setzt sich Rechnen zusammen aus verschiedenen allgemeinen Hirnfunktionen wie visuomotorische Koordination, Raum-Lage-Wahrnehmung, Figur-Grund-Unterscheidung, visuelle oder auditive Diskrimination usw. So gesehen erfordert heilpädagogische Förderung die „Behandlung" grundlegender neuropsychologischer Funktionen (Sensorik, Motorik, sensorische Integration). Dieses Verständnis von Rechenschwäche muss heute kritisch betrachtet werden. **Es gibt *keine* Untersuchungen, welche einen solch allgemeinen ursächlichen und direkten Zusammenhang zwischen fehlenden basalen Fähigkeiten und mathematischem Lernen nachweisen.** Damit wird nicht bezweifelt, dass neuropsychologische Defizite das Lernen erschweren können. Sie dürfen aber *nicht* als generelles Merkmal und *nicht* als Ursachen von Rechenschwäche betrachtet werden (VON ASTER, 2003, 169,176; MOSER OPITZ, 2004).

Rechnen ist keine basale Teilleistung, ebenso wenig wie Lesen oder Schreiben. Wer von Rechenschwäche als „Teilleistungsschwäche" spricht, verwendet nicht den neuropsychologischen Teilleistungsbegriff. Er betrachtet vielmehr zusammengesetzte, auf einer Vielzahl basaler „Teilleistungen" beruhende geistige Tätigkeiten. Lesen, Schreiben und Rechnen sind kognitiv komplexe Kulturtechniken, die ein Kind in der Schule erst erlernen muss. Rechenschwäche ist somit eine *Teilleistungsstörung* lediglich im Sinne einer schwachen Leistung in einem Teilbereich des Schulstoffes.

Auch der Begriff der (neurologischen) Teilleistungsstörung ist inzwischen fragwürdig geworden. Durch die zunehmende Ausweitung und Differenzierung der Symptome und zunehmende Einbeziehung von Entwicklungsabweichungen und kindlichen Verhaltensstörungen entstand ein Konglomerat verschiedenartiger, qualitativ und quantitativ schwer klassifizierbarer Symptome (fast 500 geschilderte Symptome, NAGGL, 1994, S. 3). KARCH (1989, S. 86-87) sagt dazu:

> „*Teilleistungsstörungen* sind ungenau definiert, ätiologisch und pathogenetisch heterogen und lassen sich diagnostisch nur bedingt erfassen. Das diagnostische Instrumentarium ist gekennzeichnet durch relativ ge-

1
Auf den Homepages einiger Therapie-Institute wird unter dem Stichwort „Rechenschwäche" von ***funktionellen Ausfällen*** gesprochen. Dies erweckt den Eindruck von krankhaften Hirnfunktionsstörungen, die nur durch besondere therapeutische Maßnahmen zu beheben seien.

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

ringe Verlässlichkeit. D. h. es gelingt in der Regel nicht , spezielle Teilleistungen selektiv zu überprüfen. Alle Untersuchungsverfahren überprüfen im Grunde sehr komplexe Vorgänge, z. B. visuelle Erfassung *und* kognitive Fähigkeiten *und* Gedächtnisleistungen, Fertigkeiten der Wiedergabe *und* sie verlangen die Bereitschaft zur Mitarbeit. Sekundäre Störungen entstehen rasch und sind oft schwerwiegender als die zugrunde liegende Teilleistungsstörung. Die prognostische Aussagekraft hinsichtlich späterer *Schulleistungen* ist statistisch nicht zu belegen. Therapieerfolge im Blick auf die Vermeidung von *Schulschwierigkeiten* bzw. Lernstörungen sind bisher nur lückenhaft nachgewiesen worden. Insbesondere muss bezweifelt werden, ob die organisch bedingten Störungen, welche z. T. als Ursache neuropsychologischer Teilleistungsstörungen in Frage kommen, letzten Endes geheilt werden können. Es gibt viele Hinweise, dass die eingeübten basalen Fertigkeiten *nicht* auf die Bewältigung neuer Aufgaben übertragen werden können."

Zur Verwendung des Begriffs „Teilleistungsschwäche" im schulischen Kontext ist grundsätzlich zu fragen, ob dieses Konzept nicht dazu dient, dem betroffenen Kind allein die Verantwortung für Lernversagen zuzuschreiben. R. KORNMANN, Fachmann für die Diagnostik von Lernbehinderungen, stellt fest:

„So ist mir auch kein einziger Fall einer diagnostizierten Teilleistungsschwäche bekannt, bei der die Unterrichtsqualität abgeklärt wurde, und ich kenne auch keinen einzigen Fall einer Teilleistungsschwäche, die im Rahmen eines Unterrichts aufgetreten wäre, der den Qualitätsmerkmalen der genannten Vermittlungskonzepte genügt."

Literaturhinweis:

GRAICHEN, J. (1979). Zum Begriff der Teilleistungsstörungen. In Lempp (Hrsg.). *Teilleistungsstörungen im Kindesalter.* Lengerich: Pabst Science Publishers.

KARCH, D. (1989). Teilleistungsstörungen. In D. Karch, R. Michaelis, B. Rennen-Allhoff, H. G. Schlack. (Hrsg.). *Normale und gestörte Entwicklung. Kritische Aspekte zu Diagnostik und Therapie.* Berlin: Springer.

KORNMANN, R. (1996). Braucht eine Humane Schule die Diagnose „Teilleistungsschwäche"? *Humane Schule,* (Okt.) S. 7-10.

MOSER OPITZ, Elisabeth (2004). Krankheit, Erfindung, Mythos, Etikett ...? Auseinandersetzung mit einem geläufigen, aber ungeklärten Begriff. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und Nachbargebiete* (2), 179-190.

NAGGL, Monika (1994). „Teilleistungsstörungen" - die Entwicklung eines Konzeptes. *Frühförderung interdisziplinär.* S. 1-9.

von ASTER, M. G. (2003). Neurowissenschaftliche Ergebnisse und Erklärungsansätze zu Rechenstörungen. In A. Fritz, G. Ricken, S. Schmidt (Hrsg.). *Handbuch Rechenschwäche Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie.* Weinheim: Beltz. S. 163-178.

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Helfen „basale Trainings"? Helfen neuropsychologische Erkenntnisse?

Nach dem Konzept der (neurologischen) Teilleistungsstörungen basieren komplexe Leistungen, beispielsweise das Rechnen, auf vielen Teilfunktionen, die sich zu einem „funktionellen System" zusammenschließen. Solche basalen Teilleistungen sind z. B. das Unterscheiden von Figur und Grund beim Sehen bzw. Haupt- und Nebengeräuschen beim Hören; die Wahrnehmung feiner Unterschiede beim Sehen und Hören; das Erfassen der Lage eines Gegenstandes im Raum; das Erfassen von räumlichen Beziehungen mehrerer Gegenstände; die Abstimmung der eigenen Bewegungen mit dem, was man sieht; die Feinabstimmung der Hand- und Fingerbewegungen beim Greifen, Basteln, Zeichnen, Schreiben; die Abstimmung der Körperbewegungen beim Gehen, Laufen, Springen. Fällt einer dieser Teilbereiche aus, so die These, funktioniert das übergeordnete System nicht.

Ein wissenschaftlich gestütztes, neuropsychologisches Modell des Mathematiklernens gibt es allerdings noch nicht. Es ist weitgehend unklar, wie und in welchem Umfang die höheren kognitiven Funktionen auf den basalen errichtet sind. Wahrscheinlich gibt es dafür verschiedene Möglichkeiten. Das ergibt sich schon daraus, dass Kinder mit verschiedenen Behinderungen dennoch rechnen lernen können. Es gibt motorisch unbeholfene Kinder, die gut im Rechnen sind und Mathematiker mit Schwierigkeiten, spontan rechts und links zu unterscheiden. Bei komplexen funktionellen Systemen existiert im Gehirn eine gewisse Austauschbarkeit: Ein- und dieselbe Aufgabe kann unter Beteiligung verschiedener neuronaler Knotenpunkte bzw. funktioneller Systeme geleistet werden. Dies gilt in besonderem Maße für mathematische Leistungen (GERSTER & SCHULTZ, 2000, S. 218).

Das neuropsychologische Teilleistungskonzept, fußend auf der Theorie der funktionellen Systeme, hat noch keine validen theoretischen oder empirischen Grundlagen (BEGEMANN, 1995, S. 395). Dennoch sind bzw. waren (besonders im Bereich der traditionellen Sonderpädagogik) Auffassungen verbreitet, bei *Lernstörungen* handele es sich um *individuelle* Schwächen und Defiziten mit pathologischer Wertigkeit im Bereich der visuellen, auditiven oder taktilen Wahrnehmung, der sensorischen Integration, der vestibulären Funktion, der Körperwahrnehmung usw., welche Voraussetzung seien für schulische Leistungen. Die Qualität des Unterrichts als Bedingung mangelnden Lernerfolges wird dabei außer Betracht gelassen.

In den so genannten Diagnose- und Förderklassen, die ab 1988 in Bayern eingerichtet wurden, sollten taktil-kinästhetisch-vestibuläre Wahrnehmungsförderung sowie Bewegungs- und Körpererfahrungen die Integration aller Sinne ermöglichen. Hiermit war die Hoffnung verbunden, die an der Basis ansetzende Förderung würde zu einer Verbesserung schulischer Leistungen führen. Dabei werden aber komplexe und weitgehend ungeklärte Zusammenhänge vereinfacht und für falsche Argumentationen benutzt (KORNMANN, 1995; GERSTER & SCHULTZ 2000, S. 217; Häußler, 2000). So schreibt BREITENBACH (1992, S. 176) im Bericht zu einer empirischen Vergleichsuntersuchung in Diagnose- und Förderklassen:

> „Bei den Schülern der Experimentalgruppe sind, verglichen mit denen aus der Kontrollgruppe 1, größere Entwicklungsfortschritte im Arbeits- und Sozialverhalten, in der taktil-kinästhetischen Wahrnehmung, der intellektuellen Leistungsfähigkeit, der visuell-räumlich-perzeptiven Funktionen, der Feinmotorik, dem Körperschema, der Bewegungsplanung und der Aufmerksamkeits-, Handlungs- und Programmsteuerung zu verzeichnen. Die Beurteilung der schulischen Leistungen erbrachte zum Zeitpunkt der Ab-

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

> schlussuntersuchung einen leichten, aber durchgängigen Entwicklungsvorsprung für die Schüler der Kontrollgruppe 1.”[1]

Das besagt: Alles was man die Kinder der Experimentalgruppe lernen ließ und den Kindern der Kontrollgruppe nicht anbot, wurde als „größerer Entwicklungsfortschritt“ gedeutet. Schön wäre es allerdings gewesen, wenn sich hätte nachweisen lassen, dass durch die so genannten basalen Trainings (z. B. visuelles Wahrnehmungstraining nach Frostig) sich das schulische Lernen verbesserte. Die Entwicklungsfortschritte in den Bereichen „kognitive Entwicklung, Wahrnehmung, Motorik, Arbeitsverhalten“ wirkten sich nach dieser wissenschaftlichen Begleituntersuchung *nicht* positiv auf die Schulleistungen aus.

VON ASTER (2003, 176) stellt fest:

> „Trainings, die sich pauschal auf die Verbesserung der Psychomotorik, der Wahrnehmung oder der Sprache beziehen, können für sich allein keine Verbesserung numerischer Kompetenzen bewirken.”

Trotzdem wird auch noch in neueren Publikationen vorgeschlagen, zur Förderung bei Rechenschwäche Spiele und Übungen zum Hören Schmecken, Riechen, zur Motorik und Raumorientierung durchzuführen (beispielsweise METZLER, 2002; SCHILLING & PROCHINIG, 2002; MILZ, 2004). Um möglichen Missverständnissen vorzubeugen: Wir sprechen uns *nicht* gegen basale Trainings aus. Wenn bei Kindern feinmotorische Probleme oder visuelle Wahrnehmungsprobleme auftreten, die in irgendeinem lebensbedeutsamen Zusammenhang störend wirken, dann soll man dem Kind entsprechende Übungen anbieten. Aber man soll *nicht* behaupten, durch solche basalenTrainings würde eine etwa vorhandene Rechenschwäche behoben oder das schulische Lernen allgemein verbessert. Neuropsychologie und Vorschul- und Schulpädagogik liegen immer noch weiter auseinander, als es auf den ersten Blick erscheinen mag. Neuropsychologische Begründungen für Fördermaßnahmen beruhen oft auf unüberprüften Annahmen. BREITENBACH (1996) resümiert:

> „Lernen und Lernstörungen aus neuropsychologischer Perspektive betrachtet, macht deutlich, dass in der sonderpädagogischen Arbeit mit teilleistungs- oder integrationsgestörten Kindern kein Bedarf besteht an ständig neuen Förderansätzen, die in ihrer Schlichtheit kaum der Komplexität menschlicher Lern- und Entwicklungsprozesse Rechnung tragen können. Es ist ebenfalls nicht möglich und nötig, ein neuropsychologisches Förderkonzept zu entwickeln. Mit Hilfe der Neuropsychologie lassen sich bisher lediglich Prinzipien für den lernförderlichen Umgang mit diesen Kindern beschreiben wie Individualisierung, handelndes Lernen, Eigenaktivität beim Lernen usw. Dies sind jedoch keine sensationellen Neuentdeckungen der Neuropsychologie, sondern altbekannte „pädagogische Weisheiten“.”

ALLARDICE und GINSBERG (1983, 332) begründen einleuchtend, weshalb Lernschwierigkeiten in Mathematik zunächst *auf der Ebene der mathematisch kognitiven Prozesse* untersucht werden sollten. Sie bezweifeln, dass man weit zurückreichende oder zurückgreifende Ursachen zuerst untersuchen müsse. *An erster Stelle* müssten vielmehr *die aktuellen kognitiven Prozesse* untersucht werden, da man wissen müsse, was die potentiellen Ursachen denn eigentlich verursachen (nämlich eine besondere Beschaffenheit der kognitiven Prozesse). Neurologische Faktoren, ebenso wie unangemessene Instruktion oder emotionale Probleme, übten ihren Einfluss im Rahmen der kognitiven Prozesse aus (zitiert nach GERSTER & SCHULTZ, 2000, 223).

[1] Im Lernzielbereich Mathematik-Grundrechnungsarten betrug der Unterschied immerhin 27 %; allerdings zugunsten der Kontrollgruppe. Und über alle Lernzielbereiche aufsummiert erreichte die Experimentalgruppe 77,5 % und die Kontrollgruppe 84,5 % aller Lernziele.

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Um es deutlich zu sagen: Mathematik lernen bedeutet *aktive Arbeit des Kindes* und zwar Arbeit *mit mathematischen Gegenständen* und mathematisches Nachdenken über sie. *Keine andere* Übung kann diese Arbeit ersetzen. Schlicht gesagt: **Rechnen lernt man durch Rechnen**, wie man eben Klavierspielen nur durch Klavierspielen lernt. In der Regel besteht somit die Aufgabe darin, dem Kind einen Weg des Lernens mathematischer Konzepte zu ermöglichen, auf dem es mit *seinen* Mitteln und in *seinem* Tempo vorankommen kann. Kennt man Schwächen und Stärken der neuropsychologischen Funktionen des Kindes, kann man versuchen, dieses Wissen in die fachdidaktischen und methodischen Überlegungen einfließen zu lassen. Die realen Probleme der Lehrenden und Lernenden sollen aber nicht mystifiziert und in ein neuropsychologisch-therapeutisches Setting verlagert werden. Wenn beim Erlernen mathematischer Konzepte basale Fähigkeiten gebraucht werden, soll deren Förderung einbezogen werden, aber immer im bereichsspezifischen Zusammenhang und mit klarem Blick darauf, was genau zum Erlernen eines speziellen mathematischen Konzeptes tatsächlich erforderlich ist.

Literaturhinweis:

ALLARDICE, B. S. & GINSBURG, H. P. (1983). Children's Psychological Difficulties in Mathematics. In H. P. Ginsburg, (1983). *The Development of Mathematical Thinking.* New York: Academic Press.

BEGEMANN, E. (1995). Anmerkungen und Fragen zur „sonderpädagogischen“ Situation. Ein Orientierungsversuch. *Zeitschrift für Heilpädagogik,* 388-397.

BREITENBACH, E. (1992). *Unterricht in Diagnose- und Förderklassen. Neuropsychologische Aspekte schulischen Lernens.* Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

BREITENBACH, E. (1996). Auf neuen Pfaden zu alten (sonder-)pädagogischen Prinzipien. Neuropsychologische Aspekte von Lernen und Lernstörungen. *Zeitschrift für Heilpädagogik,* 408-419.

GERSTER, H.-D. & SCHULTZ, Rita (2000). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen.* Pädagogische Hochschule Freiburg. (420 S.). Kostenfreier Download unter www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397/

HÄUSSLER, M. (2000). *Skepsis als heilpädagogische Haltung: Reflexionen zur Berufsethik der Heilpädagogik.* Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

KORNMANN, R. (1995). Rezension zu Milz, Ingeborg: Rechenschwächen erkennen und behandeln. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete* 64, (3), 368-370.

METZLER, Beate (2001). *Hilfe bei Dyskalkulie.* Dortmund: verlag modernes lernen.

MILZ, Ingeborg (2004). *Rechenschwächen erkennen und behandeln. Teilleistungsstörungen im mathematischen Denken neuropädagogisch betrachtet*. Dortmund: Borgmann.

MOSER OPITZ, Elisabeth (2004). Krankheit, Erfindung, Mythos, Etikett ...? Auseinandersetzung mit einem geläufigen, aber ungeklärten Begriff. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und Nachbargebiete* (2), 179-190.

SCHILLING, S., PROCHINIG, T. (2002). *PraxisbuchDyskalkulie.* Winterthur: Schubi.

von ASTER, M. G. (2003). Neurowissenschaftliche Ergebnisse und Erklärungsansätze zu Rechenstörungen. In A. Fritz, G. Ricken, S. Schmidt (Hrsg.). *Handbuch Rechenschwäche Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie.* Weinheim: Beltz. S. 163-178.

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Zählendes Rechnen als Problem

Fachliche Argumente

Zählendes Rechnen stützt sich auf ein *einseitiges Zahlkonzept*: Zahlen als *Positionen* oder als *Anfangsstücke* in der Reihe der Zählwörter. Vernachlässigt wird dabei das Konzept: Zahlen sind (additive oder multiplikative) Zusammensetzungen aus anderen Zahlen. Dies behindert auch das Stellenwertverständnis.

Zählendes Rechnen stützt sich auf ein *einseitiges Operationsverständnis*: Rechenoperationen als Anweisungen, Zählvorgänge auszuführen. 2+7 ist dann viel schwieriger als 7+2. Bei Verwendung des Operatorkonzeptes wird stets *nur* der Rechenschritt zerlegt. 8+8 erfordert dann eine Zerlegung der 8.

Zählendes Rechnen ist *fehleranfällig*: Das Ergebnis ist oft um 1 zu groß oder zu klein, weil die Rolle des Anfangs- und/oder Endgliedes der Zählsequenz unklar ist.

Die Techniken des Vollständig-Auszählens sind *umständlich*, die Weiterzähl-Techniken erfordern *doppeltes Zählen*: Nennen der Zwischenpositionen und Endposition sowie Mitzählen, wie viele Zählschritte bereits gemacht wurden. Dabei werden für das Eine oder das Andere häufig *Finger* benutzt. Das doppelte Zählen kann auch *verbal* gestützt werden, z. B. bei der Aufgabe 4 + 3 durch die Sprechweise 4 plus 1 sind 5, plus 2 sind 6, plus 3 sind 7; bei 7 - 3 entsprechend 7 minus 1 sind 6, minus 2 sind 5, minus 3 sind 4). Beide Methoden zeigen die *Komplexität des zählenden Rechnens*.

Zählendes Rechnen wird *bei größeren Zahlen immer umständlicher*.

Lernpsychologische Argumente

Gedächtnispsychologisch:

Zähltechniken können trainiert und perfektioniert werden. Mit zunehmender Perfektion schwindet aber das Bedürfnis, sich Zahlensätze zu merken. Zähltechniken fördern somit nicht das Bedürfnis, sich etwas zu merken. *Das Repertoire auswendig gewusster Zahlensätze steigt nur sehr langsam oder gar nicht.*

Zählend rechnende Kinder *verwenden nicht die Zahlensätze, die sie bereits auswendig wissen*, sondern neigen zu stereotyper Anwendung ihrer vermeintlich sicheren Zähltechnik.

Zählendes Rechnen liefert jeweils nur *Einzelfakten.* Diese werden aber *nicht in ein Beziehungsgeflecht eingebettet*, werden also leicht vergessen.

Wenn Kinder in mittleren Schuljahren Fakten immer noch nicht auswendig wissen, *verzichten sie ganz auf Merkversuche* und verlassen sich voll auf prozedurale Nutzung von Zählhilfen, vor allem der Finger.

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Assoziationspsychologisch:

Die *Aufmerksamkeit* von Zählkindern richtet sich mehr auf die doppelte Zählprozedur als auf den Zusammenhang zwischen Aufgabe und Ergebnis.

Zählende Rechner haben es schwer, zwischen einer Aufgabe und dem nach einer länger dauernden Zählprozedur gefundenen Ergebnis eine Verknüpfung herzustellen. Das Lernen einer *assoziativen Verknüpfung* zwischen Aufgabe (= Reiz) und Ergebnis (= Reaktion) gelingt aber nur, wenn Reiz und Reaktion zeitlich dicht aufeinander folgen (etwa innerhalb einer Halbsekunde).

Kognitionspsychologisch:

Zählkinder *nutzen nicht Beziehungen zwischen* Zahlensätzen. Nachdem sie zählend $3+3$ berechnet haben, machen sie dasselbe anschließend mit $3+4$, ohne sich den Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben bewusst zu machen und ihn vorteilhaft zu nutzen. Die beiden nacheinander gestellten Aufgaben $3+4$ und $13+4$ berechnen sie jeweils zählend, ohne die dekadische Analogie (den „Zehner-Vorteil“) zu nutzen.

Zählendes Rechnen beansprucht wegen der Komplexität der Zählprozedur viel Aufmerksamkeit, die dann beim halbschriftlichen und schriftlichen Rechnen, beim Lösen von Sachaufgaben, bei geometrischen Berechnungen usw. für die Planung von Lösungsschritten und das Einhalten von Strategien und Verfahrensregeln nicht mehr zur Verfügung steht (begrenzte Speicherkapazität des Arbeitsgedächtnisses).

Zum Problem des zählenden Rechnens ist schließlich folgendes zu bedenken:

1. Je höher der Anteil der mit Zählstrategien gelösten Aufgaben ist, desto höher ist die Fehlerquote insgesamt.

2. Aus der Beobachtung von Lernprozessen ist bekannt, dass das Gehirn dem Prinzip folgt, möglichst wenig Verarbeitungsaufwand zu investieren. Es gibt einen *mentalen Widerstand gegen Veränderung eines erlernten Verhaltens.* Selbst wenn Lernen (also Verhaltensänderung) stattfindet, scheinen die alten Verhaltensstrukturen noch weiter gespeichert zu bleiben. Unter ungünstigen Umständen, z. B. Stress können sie erneut das Verhalten bestimmen. Gerade bei der Ablösung vom zählenden Rechnen treten *in Stresssituationen* (z. B. Wettrechnen, Klassenarbeiten) *Rückfälle ins zählende Rechnen* häufig auf. Wenn sich ein Kind zum "Zählkind" entwickelt hat, sind Hilfsmaßnahmen ab dem Ende des zweiten Schuljahres sehr aufwendig und oft wenig erfolgreich (LORENZ & RADATZ, 1993, *Handbuch des Förderns,* S. 117).

“Zählmethoden als einzige Lösungsstrategie über das erste Schuljahr hinaus zu tolerieren, ist unterlassene Hilfeleistung und bewirkt, dass sich Unterschiede zwischen schwachen und befähigten Schülern ständig vergrößern.”

GERSTER 1996, Vom Fingerrechnen zum Kopfrechnen; Schriftenreihe der PH Heidelberg, Bd. 25

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Vorteile nicht zählender Rechenstrategien

Die Lernpsychologie sagt uns, dass es im Wesentlichen drei Grundformen gibt, in denen mathematisches Wissen mental repräsentiert wird: die **enaktive** (auf Handlungen mit konkretem Material basierende), die **ikonische** (auf bildhaften Vorstellungen basierende) und die **symbolische** (auf Zeichen und Sprache basierende) **Darstellung**.

Ihre große Kraft entfaltet **Visualisierung** erst dann, wenn sie die beiden anderen Grundformen miteinander verbindet. Im Fazit der PISA-Studie lesen wir:

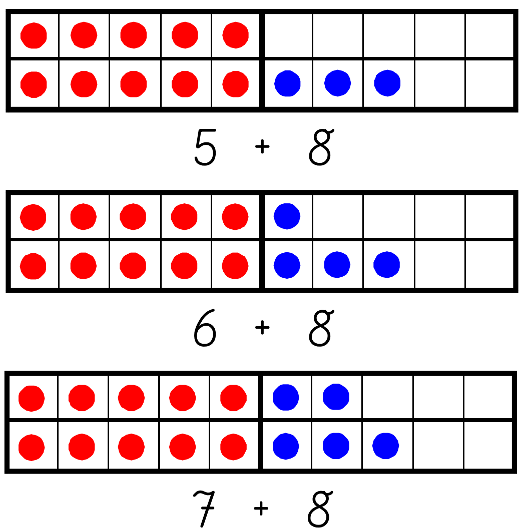
> „Im herkömmlichen Unterricht nicht nur in der Grundschule ist das verständnisfördernde *Potenzial von visuellen Darstellungsformen* noch lange nicht ausgereizt.“

Wegen ihres *statischen* Charakters eignen sie sich besonders für die Diskussion und Reflexion unterschiedlicher Lösungsstrategien.

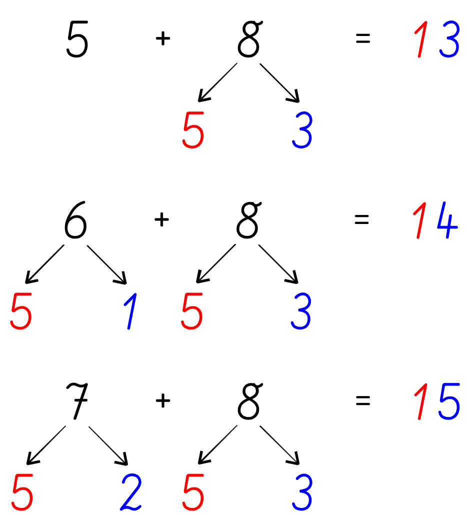
Nicht zählende Rechenstrategien lassen sich für alle vier Rechenoperationen anhand geeignet gegliederter, modell- oder bildhafter Zahldarstellungen leicht entdecken, verstehen und begründen. Diese fördern zugleich ein flexibles Zahlverständnis, insbesondere das Verständnis von Zahlen als Zusammensetzungen aus anderen Zahlen und flexibles, vorteilhaftes Rechnen.

Alle Aufgaben des kleinen **Einsundeins und Einsminuseins** lassen sich mit den nicht zählenden Rechenstrategien „Zehnersumme“, „Verdoppeln“, „Fünfer-Vorteil“, „Zehner-Vorteil“ und den zugehörigen Nachbaraufgaben (Verdoppeln plus Eins, Verdoppeln plus Zwei, „Zehnervorteil bei der Neun“ und „Zehnervorteil bei der Acht“) leicht abrufbar im Langzeitgedächtnis einprägen.

Hier einige Beispiele zum „Fünfer-Vorteil“, bei dem (wie schon nach Adam Riese) mit Fünfer-Portionen gerechnet wird. Dabei wird benutzt, dass die „8“ sich zusammensetzen lässt aus einer „5“ und einer „3“. Die Ergebnisse der Aufgaben 5 + 8, 6 + 8 und 7 + 8 lassen sich dann in der Veranschaulichung unmittelbar ablesen, verstehen und begründen:



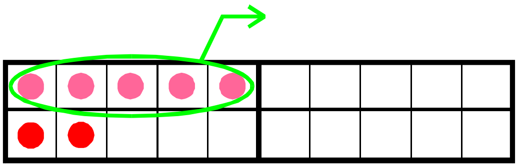
In symbolischer Notation:



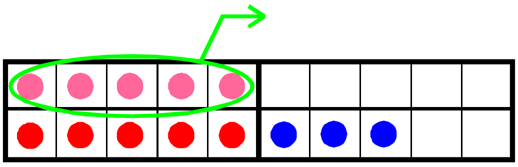
Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

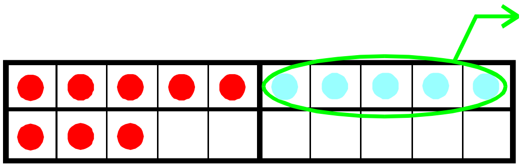
Entsprechendes gilt für die Subtraktion:



$7 - 5 = 2$



$13 - 5 = 8$



$13 - 5 = 8$

Derartige Beispiele erleichtern zugleich die Ablösung von einseitigen Zahlvorstellungen: Zahl als Position in der Zahlwortreihe oder als Anfangsstück der Zahlwortreihe.

Für das kleine **Einmaleins und Einsdurcheins** sind die „kurzen Einmaleinsreihen“ (also das 1-, 10-, 5- und das 2-Fache einer Zahl) die *Ankerpunkte*, von denen aus die restlichen Aufgaben jeder Reihe durch Bilden der Nachbaraufgaben rasch und sicher abgeleitet werden können.

Ableitungsstrategien nutzen Vorwissen und verstärken dieses somit. Sie machen *Beziehungen zwischen* Zahlensätzen bewusst, verbessern so die Fähigkeit, Fakten zu erinnern und reduzieren zugleich den Memorierstoff. Wenn ich beispielsweise weiß, dass 3 + 5 = 8 ist, dann weiß ich auch, wie viel ich von 3 bis 8 oder von 5 bis 8 ergänzen muss und kenne den Unterschied zwischen 3 bzw. 5 und 8, also die Differenzen 8 - 3 bzw. 8 - 5.

Nicht zählende Rechenstrategien haben *kognitionspsychologische* und *assoziationspsychologische* Vorteile:

Weil Aufgabe und Ergebnis rasch aufeinander folgen, gelingt das Lernen von Assoziationen besser (Reiz-Reaktions-Lernen durch enge zeitliche Paarung).

Nichtzählend rechnende Kinder sind nach einer Einarbeitungsphase erheblich schneller und vor allem sicherer als zählend rechnende, haben also mit ihren Strategien ständig Erfolgserlebnisse (Lernen durch Verstärkung).

Nichtzählend rechnende Kinder sind motiviert, ihr Repertoire auswendig gewusster Zahlensätze zu vergrößern, weil sie diese zum Ableiten (Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlensätzen) brauchen. Sie bauen also einen zunehmenden Vorrat an bekannten Fakten auf, um neues Faktenwissen zu erzeugen.

Prof. Hans-Dieter Gerster

Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Kernprobleme und Stolpersteine beim Rechnenlernen

Kernproblem: Rechnen nach Rezept (als Manipulieren von Zahlen)

Stolperstein 1	Stolperstein 2	Stolperstein 3	Stolperstein 4
Einseitiges Zahlverständnis: Zahlen als Positionen (ZR bis 20)	**Mehrstellige Zahlen ohne Stellenwertverständnis**	**Rechnen als Schritte auf der Zahlwörterreihe** (Zählendes Rechnen)	**Fehlende Automatisierung der Basisfakten**

Beim Erlernen des Rechnens haben Kinder fünf Hürden zu überwinden:

Hürde 1	Hürde 2	Hürde 3	Hürde 4	Hürde 5
Neben ordinalen auch kardinale Zahlvorstellungen entwickeln (vom Reihenfolge- zum Anzahlaspekt).	Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen verstehen (Teile-Ganzes-Konzept).	Das Stellenwertkonzept im Sinne des Teile-Ganzes-Konzeptes verstehen.	Die vier Rechenoperationen im Sinne des Teile-Ganzes-Konzeptes verstehen.	Rasche, mühelose Abrufbarkeit der Basisfakten zur Vermeidung der Überlastung des Arbeitsgedächtnisses erreichen (kleines Einsundeins, Einsminuseins, Einmaleins und Einsdurcheins beherrschen).

Drei Empfehlungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule

Aus der Analyse von Lernschwierigkeiten rechenschwacher Kinder ergeben sich folgende Empfehlungen für die Gestaltung des Mathematikunterrichts. Sie erleichtern *allen* Kindern die Entwicklung kreativer, flexibler und ökonomischer Rechenstrategien.

Kinder sollen sich **Zahlen** vorstellen als **gegliederte Quantitäten** (nicht nur als Ziffern oder Positionen in der Zahlwortreihe oder am Zahlenstrahl). Besonders wichtig sind dabei die **Beziehungen der Zahlen zur Fünf und zur Zehn**.

Rechenoperationen sollen sie sich vorstellen als (statisches) Ergebnis von **Handlungen an geeignet gegliederten Quantitäten** (nicht nur als Anweisungen für die Durchführung aufeinander folgender Zählvorgänge). Besonders wichtig ist dabei das **Rechnen mit Fünfer- und Zehnerportionen**. Bei der konkreten Darstellung von Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten sollen **Aufgabe und Ergebnis zugleich sichtbar** sein, also **<u>nicht</u>** zusammenschieben, **<u>nicht</u>** wegnehmen!

Die **Automatisierung** der Basisfakten soll sich ergeben aus dem einsichtigen **Herstellen von Beziehungen zwischen Zahlensätzen** anhand **visueller Vorstellungen bei geeignet gegliederten Quantitäten** (nicht nur durch mechanisches Auswendiglernen). Dabei sind besonders wichtig das Verdoppeln und Halbieren sowie das Rechnen mit Fünfer- und Zehnerportionen.